GEOMETRI DALAM RUANG DIMENSI TIGA

(Al. Krismanto, M.Sc.)

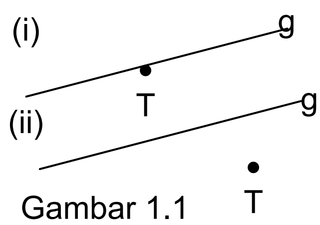
I. KEDUDUKAN TITI*K*, GARIS, DAN BIDANG

A. TITI*K*, GARIS DAN BIDANG

Titik merupakan unsur ruang yang paling sederhana, tidak didefinisikan, tetapi setiap pembaca diharapkan dapat memahaminya. Yang dimaksud garis dalam bahasan ini adalah garis lurus dan yang dimaksud dengan bidang adalah bidang datar. Keduanya berukuran tak terbatas. Untuk garis tak terbatas panjangnya, sedangkan untuk bidang tak terbatas luasnya. Garis digambar digunakan sebatas yang diperlukan, khusus pada tulisan ini tidak berujung anak panah. Untuk menggambar sebuah bidang biasanya digunakan sebuah persegi panjang berukuran sesuai keperluan. Namun karena kedudukannya umumnya tidak frontal (tidak sejajar atau tidak pada bidang gambar), maka sebuah bidang datar biasa diwakili oleh sebuah jajar genjang. Untuk menunjukkan sebuah titik tertentu, kadang-kadang digunakan sebuah noktah. Pada bangun datar atau bangun ruang tertentu, misalnya pada sebuah kubus, meskipun bangun ruang tersebut mempunyai 8 titik sudut sebagai titik potong tiga bidang, atau tiga rusuk, titiknya tidak biasa diberi noktah.

B. KEDUDUKAN TITIK TERH*AD*AP GARIS DAN BIDANG

1. Jika diketahui sebuah titik *T* dan sebuah garis g, mungkin:



Gambar 1.1

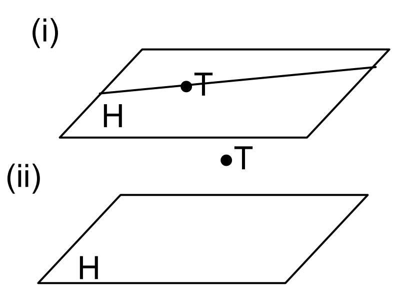
a Titik *T* terletak pada garis g, atau garis *g* melalui titik *T* (Gb. 1.1 (i))

b Titik *T* berada di luar g, atau garis *g* tidak melalui titik T. (Gb. 1.1 (ii))

Jika *T* pada *g* dan *P* pada g, maka dapat dinyatakan bahwa garis *g* melalui *T* dan P

Aksioma 1: *Melalui dua buah titik dapat dibuat tepat satu garis.*

2. Jika diketahui sebuah titik *T* dan sebuah bidang *H,* mungkin:



Gambar 1.2

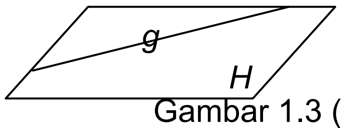
a Titik *T* terletak pada bidang *H,* atau bidang *H* melalui titik *T* (Gb. 1.2 (i)).

Untuk menunjukkannya dibantu dengan menggambar sebuah garis pada bidang *H* (lihat C)

b Titik *T* tidak terletak pada bidang *H,* atau bidang *H* tidak melalui titik T(Gb. 1.2 (i)).

C. KEDUDUKAN GARIS TERH*AD*AP BIDANG DAN GARIS

1. Jika diketahui sebuah garis *g* dan sebuah bidang *H,* mungkin:



Gambar 1.3 (i)

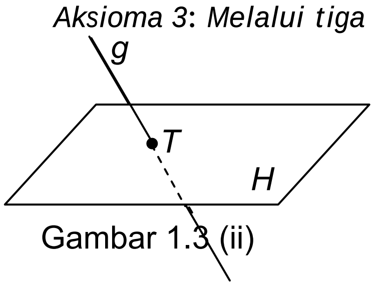
a Garis *g* terletak pada bidang *H,* atau bidang *H* melalui garis g
Sebuah garis *g* dikatakan terletak pada bidang *H* jika setiap titik pada garis *g* terletak pada bidang *H.*
Untuk menunjukkannya, ujung ruas garis wakil *g* harus terletak pada sisi jajar genjang wakil bidang *H.*

Jika ada titik *T* di luar *g* juga terletak pada bidang *H,* maka dapat dinyatakan pula bahwa bidang *H* melalui sebuah garis dan sebuah titik di luar garis itu.

Aksioma 2: *Melalui sebuah garis dan sebuah titik di luar garis tersebut dapat dibuat tepat sebuah bidang datar.*

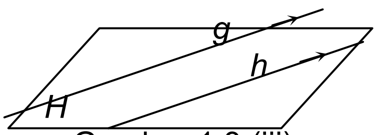
Karena garis *g* tertentu jika dua ada dua titik tertentu (misal *A* dan *b)* yang dilaluinya, maka:

Aksioma 3: *Melalui tiga buah titik tak segaris dapat dibuat tepat sebuah bidang datar.*



Gambar 1.3 (ii)

b Garis *g* memotong bidang *H,* atau garis *g* dan *H* berpotongan.
Garis *g* dikatakan memotong bidang *H* jika garis *g* dan bidang *H* mempu-nyai hanya sebuah titik persekutuan.
Titik itu disebut titik potong atau titik tembus garis *g* terhadap bidang *H.* Pada Gb. 1.3 (ii), *T* adalah titik tembus *g* terhadap *H.*



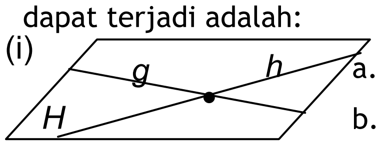
Gambar 1.3 (iii)

c Garis *g* sejajar bidang *H* (g // H), atau bidang *H* sejajar garis *g.*
Sebuah garis *g* dikatakan sejajar bidang *H* jika garis *g* dan bidang *H* tidak mempunyai titik persekutuan.
Untuk menunjukkannya dapat dilakukan dengan menggambar sebuah garis pada *H* (misal h) sejajar garis *g*. Lihat Gb. 1.3 (iii).

2. Jika diketahui sebuah garis *g* dan sebuah garis *H,* mungkin:

Garis *g* dan garis *H* terletak pada sebuah bidang (misal H). Jika demikian maka yang dapat terjadi adalah:

(i)

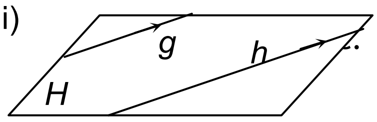


a. *g* dan *H* berimpit. Dikatakan *g = H.*

b. *g* dan *H* berpotongan (pada sebuah titik). (Gb. 1.4 (i))

Aksioma 4: *Melalui dua garis berpotongan dapat dibuat tepat sebuah bidang datar.*

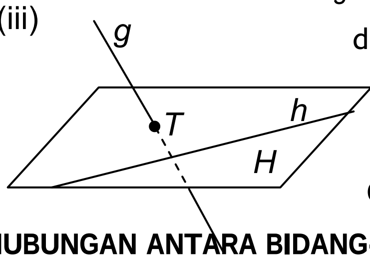
(ii)



c. $g \parallel h$, yaitu jika keduanya tidak mempunyai titik persekutuan. (Gb. 1.4 (ii))

Aksioma 4: *Melalui dua garis sejajar dapat dibuat tepat sebuah bidang datar.*

(iii)



d. garis *g* dan garis *H* tidak sebidang. Dikatakan bahwa garis *g* dan *H* bersilangan (silang menyilang). Jadi keduanya tidak sejajar dan juga tidak mempunyai titik persekutuan.

Gambar 1.4

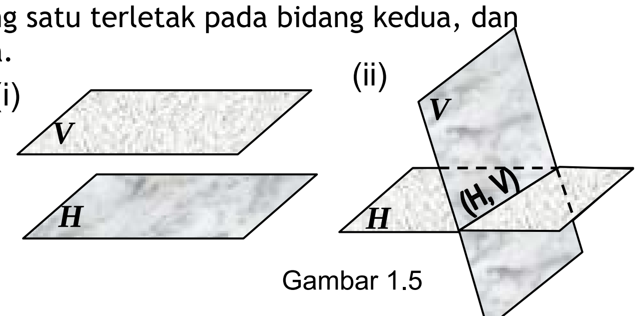
D. HUBUNGAN ANTARA BIDANG-BIDANG

Dua bidang berimpit (semua titik pada bidang yang satu terletak pada bidang kedua, dan sebaliknya) dipandang sebagai sebuah bidang saja.

1. Hubungan antara Dua Bidang

Jika diketahui bidang *H* dan *V*, maka mungkin:

(i) (ii)

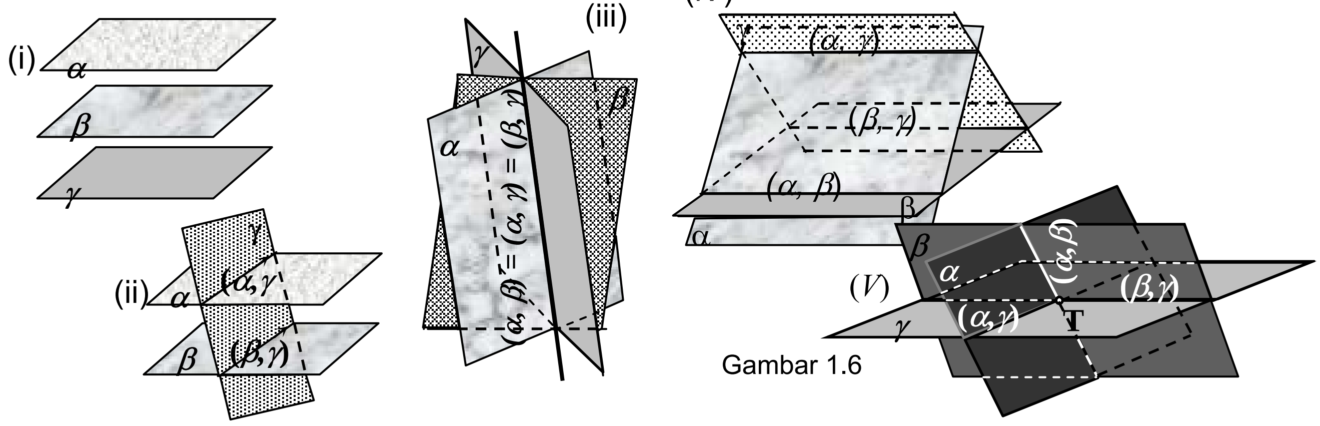


Gambar 1.5

a Bidang *H* dan *V* sejajar
Keduanya sama sekali tidak mempunyai titik persekutuan. (Gb. 1.5 (i))

b Bidang *H* dan *V* berpotongan pada sebuah garis. Garis potong ini biasa dilambangkan dengan (H, *V*). (Gb. 1.5 (ii))

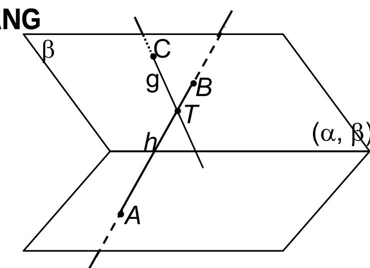
2. Hubungan antara Tiga Bidang (α, β, γ)



Gambar 1.6

a. Ketiganya sejajar: $\rightarrow$ Bidang $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ (Gb. 1.6 (i))
b. Dua bidang sejajar, dipotong bidang ketiga: Bidang $\alpha \parallel \beta$ dan $\gamma \nparallel \alpha$, $\gamma \nparallel \beta \Rightarrow (\alpha, \gamma) \parallel (\beta, \gamma)$ (Gb. 1.6 (ii))
c. Ketiga bidang berpotongan pada satu garis. $\Rightarrow$ (α, β), (α, γ), dan (β, γ) berimpit. (Gb. 1.6 (iii))
d. Ketiga bidang berpotongan pada tiga garis potong yang sejajar. $(\alpha, \beta) \parallel (\alpha, \gamma) \parallel (\beta, \gamma)$ (Gb. 1.6 (i*V*))
e. Ketiga bidang berpotongan pada sebuah titik $\Rightarrow$ ketiga garis potong (α, β), (α, γ), dan (β, γ) melalui sebuah titik. (Gb. 1.6 (*V*))

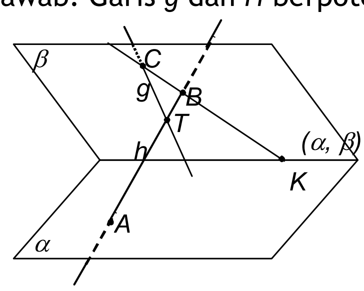
E. MENENTUKAN TITIK POTONG GARIS DAN BIDANG DAN GARIS POTONG ANTARA BIDANG-BIDANG



Gambar 1.7

Garis *g* dan *H* berpotongan di titik *T*. Garis *H* menembus α di *A* dan β di B. Garis *g* memebus β di *C*. Tentukan titik tembus *g* terhadap α.

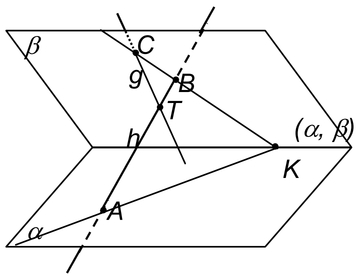
Jawab: Garis *g* dan *H* berpotongan. Jadi dapat dibuat sebuah bidang misal γ melalui *g* dan *H.*

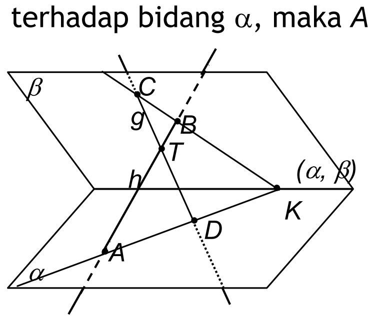


$$\left.\begin{array}{l} C \text{ dan } B \text{ pada bidang } \gamma \\ C \text{ dan } B \text{ pada bidang } \beta \end{array}\right\} CB = (\beta, \gamma)$$

(β, γ) memotong (α, β) di titik K. Maka garis potong ketiga yaitu (α, γ) juga melalui *K* (*).

Karena *A* pada *H,* maka pada γ. Titik *A* titik tembus *H* terhadap bidang α, maka *A* pada α. Jadi *A* pada (α, γ). (**)





Dari (*) dan (**) maka (α, γ) = garis *KA*

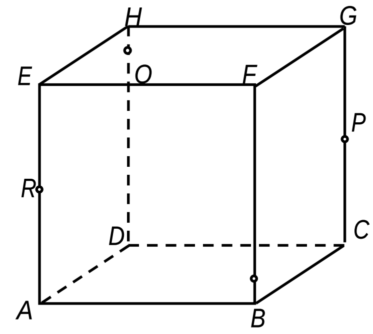
KA dan *g* pada bidang γ, keduanya berpotongan.di titik *D* = titik tembus *g* terhadap bidang α.

Menggunakan Dasar Hubungan Tiga Bidang

Contoh

Diketahui kubus *ABCD.EFGH* (Gb 1.8). Titik P, Q, dan R berturut-turut terletak pada rusuk $\overline{CG}$, $\overline{DH}$ dan $\overline{AE}$. Bidang α melalui P, Q, dan R. Gambarlah garis-garis potong:\

a. (α, *AD*HE)
b. (α, *BCG*F)

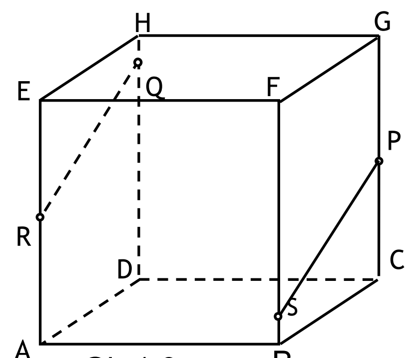


Gb 1.8

Jawab:

a. *Q* pada α dan *Q* pada *ADHE* $\Rightarrow$ *Q* pada (α, *ADHE)* ... (1)
R pada α dan *R* pada *ADHE* $\Rightarrow$ *R* pada (α, *ADHE)* ... (2)
Dari (1) dan (2) maka $\overline{QR}$ = (α, *ADHE)*

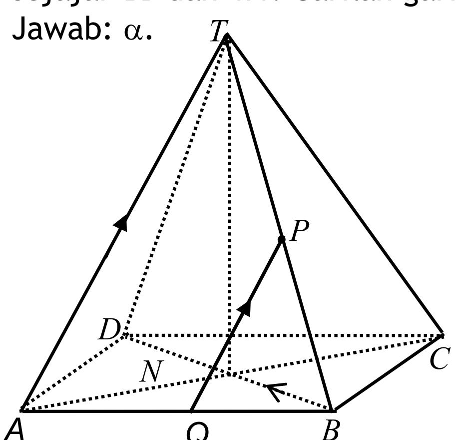
a. *P* pada α dan *P* pada *BCGF* $\Rightarrow$ (α, *BCGF)* melalui titik *P* ... (3)
Bidang *BCGF* $\|$ *ADHE* dipotong bidang α, maka (α, *BCGF)* $\|$ (α, *ADHE)* = $\overline{QR}$ ... (4)
Dari (3) dan (4) maka (α, *BCGF)* melalui *P* sejajar $\overline{QR}$ (Gb 1.9 (i)), yaitu garis $\overline{PS}$



Gb 1.9

Titik *P* adalah titik tengah rusuk $\overline{TB}$ pada limas beraturan *T.ABCD*. Bidang α melalui *P* sejajar $\overline{BD}$ dan $\overline{TA}$. Carilah garis-garis potong bidang α dengan sisi-sisi limas.

Jawab: α.

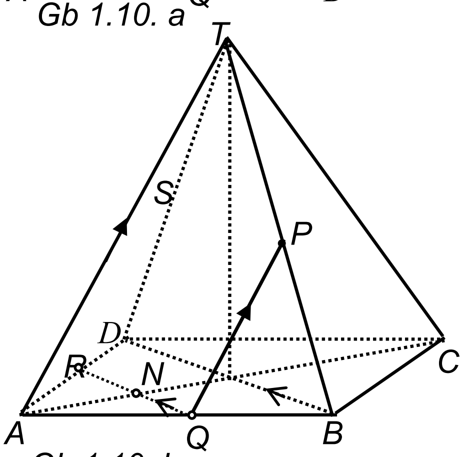


Gb 1.10. a

$$\left.\begin{array}{l}\text{Bidang } \alpha \text{ melalui } P // \overline{TA} \\ P \text{ pada bidang } TAB\end{array}\right\} (\alpha, TAB) \parallel \overline{TA}$$

Untuk membuat (α, *TAB*) dibuat *PQ* pada bidang *TAB* $\|$ $\overline{TA}$ (*Q* pada $\overline{AB}$) Gb 1.10a.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Bidang } \alpha \ // \ \overline{BD} \\ \overline{BD} \text{ pada bidang } ABCD \\ Q \text{ pada } \alpha \text{ dan } ABCD\end{array}\right\} \begin{array}{l}(\alpha, ABCD) \\ \text{melalui } Q // \overline{BD}\end{array}$$



Gb 1.10. b

Garis tersebut memotong *AD* di *R* dan $\overline{AC}$ di *N*. (Gb 1.10. *b)*
Berdasar sifat kesejajarannya terhadap $\overline{TA}$, maka:(i) pada *TAD* dibuat garis melalui *R* sejajar $\overline{TA}$.
$\overline{TA}$ memotong $\overline{TD}$ di S, (ii) pada *TAC* dibuat garis melalui *N* sejajar $\overline{TA}$ memotong $\overline{TC}$ di *M*.
Irisan adalah segi lima *PQRSM* (Gb 1.10. c)

Dengan demikian maka prosedur menggambarnya sebagai berikut:

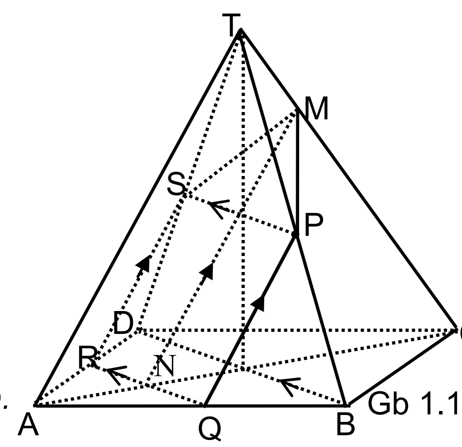
1) Pada bidang *TAB* ditarik garis $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{TA}$ (*Q* pada *AB*)

2) Pada bidang *ABCD* ditarik $\overleftrightarrow{QR} \parallel \overline{BD}$ (*R* pada $\overline{AD}$) memotong $\overline{AC}$ di N.

3) Pada bidang *TAD* ditarik garis $\overleftrightarrow{RS} \parallel \overline{TA}$ (*S* pada $\overline{TD}$)

4) Pada bidang *TAC* ditarik garis melalui N $\parallel \overline{TA}$ memotong $\overline{TC}$ di *M*.

5) Garis-garis potongnya adalah *PQ*, *QR*, *RS*, *SM*, dan *MP*

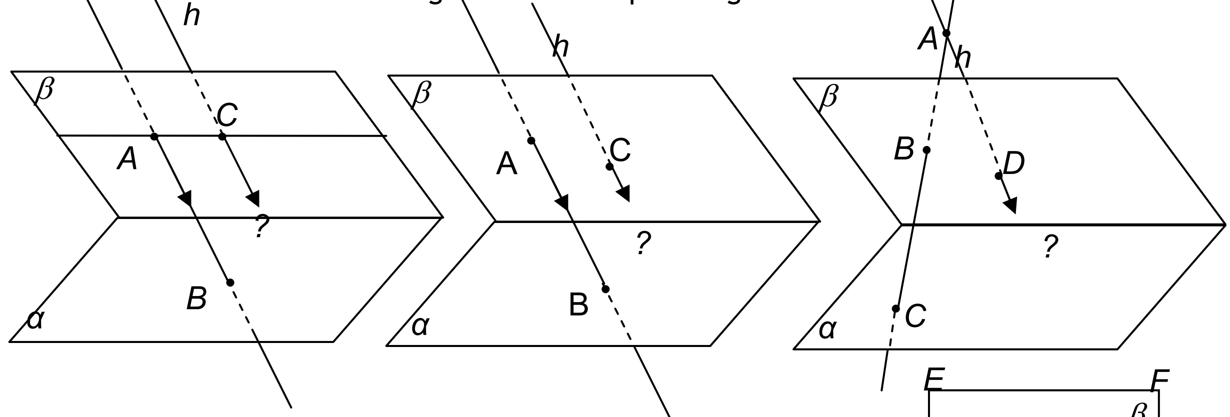


Gb 1.10. c

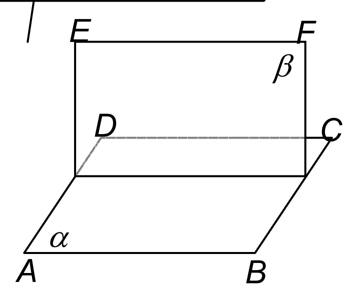
Segilima *PQRSM* disebut irisan bidang α terhadap limas *T.ABCD.*

Latihan 1

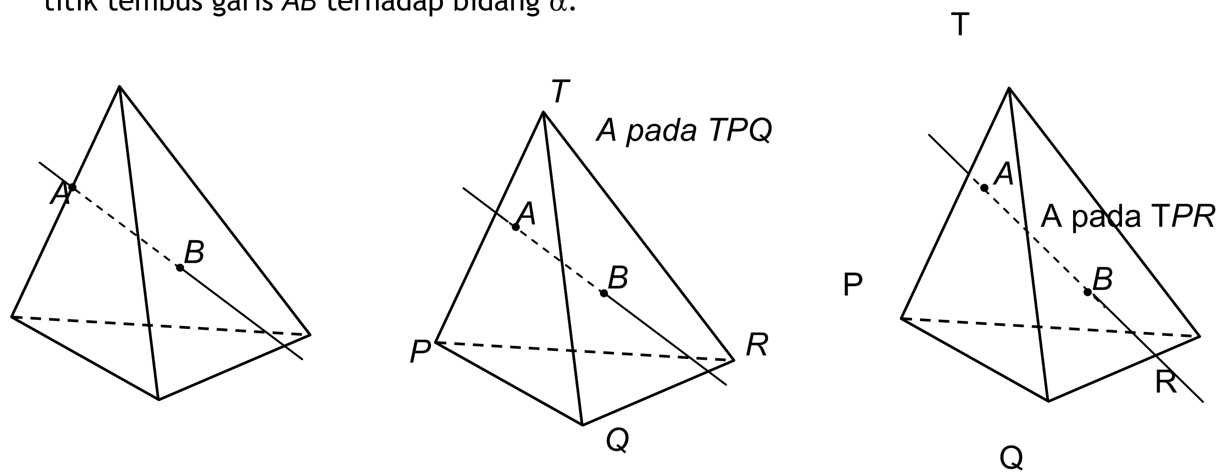
1. Salin dan tentukan titik tembus garis *H* terhadap bidang α.



2. Gambarlah garis-garis potong antara bidang *ACF* dan *BD*E dengan bidang α dan β, dan juga antara bidang *ACF* dan *BD*E.

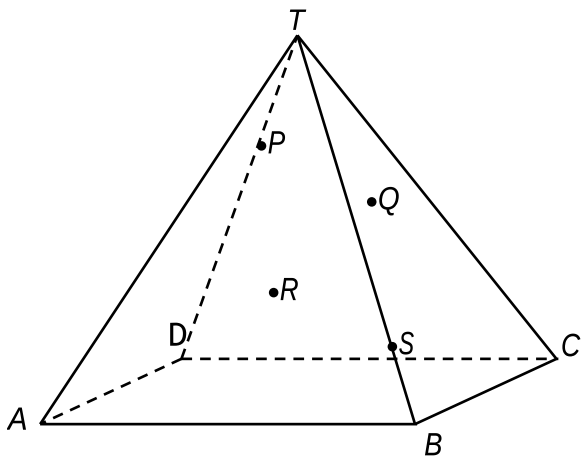


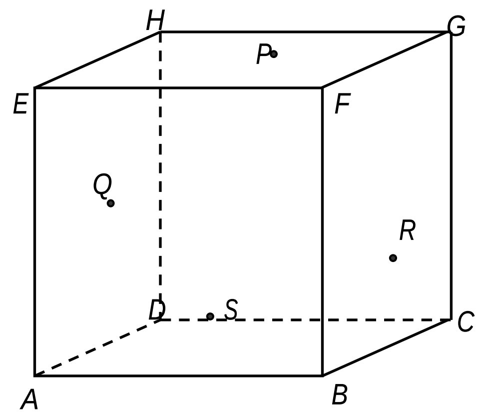
3. Limas-limas di bawah ini terletak pada bidang α. Tentukan titik tembus garis *AB* terhadap bidang α.



4. Pada kubus *ABCD.EFGH*, titik-titik P, Q, R dan S berturut-turut terletak pada bidang *CD*HG, *ADHE*, *BCGF*, dan ABFE. Kubus tersebut diletakkan pada bidang α. Tentukanlah titik tembus garis-garis $\overleftrightarrow{PQ}$ $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{PS}$, $\overleftrightarrow{QR}$, dan $\overleftrightarrow{QS}$ terhadap bidang α (lihat gambar di bawah No. 5)

5. Pada limas *T.ABCD*, titik-titik P, Q, R dan S berturut-turut terletak rusuk $\overline{TD}$, bidang *TBC*, bidang *TAB*, dan rusuk $\overline{TB}$. Alas limas pada pada bidang α. Tentukanlah titik tembus garis-garis $\overleftrightarrow{PQ}$ $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{PS}$, $\overleftrightarrow{QR}$, dan $\overleftrightarrow{QS}$ terhadap bidang α.

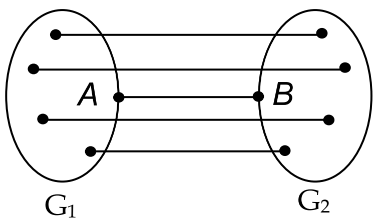

T
P
Q
R
D
S
C
A
B


H
G
P
E
F
Q
R
D
S
C
A
B

II. JARAK DAN SUDUT

A. JARAK

Definisi: Jarak antara dua buah bangun adalah panjang ruas garis penghubung terpendek yang menghubungkan dua titik pada bangun-bangun tersebut.

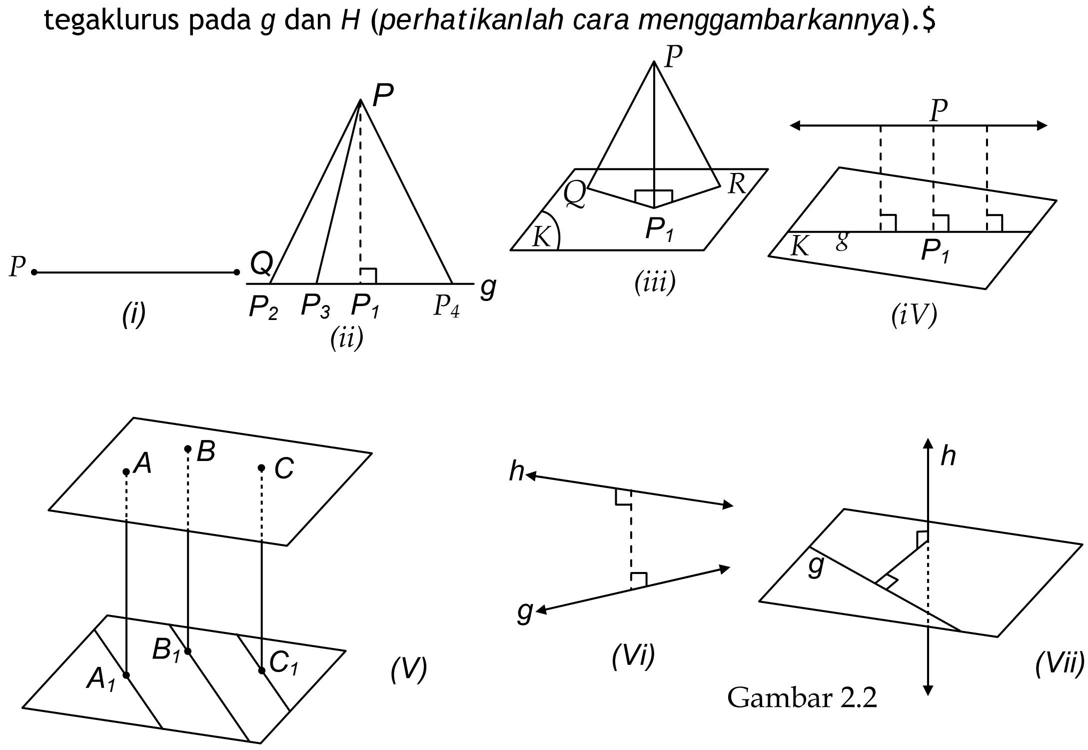


Gambar 2.1

Jika G_1 dan G_2 adalah bangun-bangun geometri, maka G_1 dan G_2 dapat dipikirkan sebagai himpunan titik-titik, sehingga dapat dilakukan pemasangan antara titik-titik pada G_1 dan G_2.

Jika ruas garis $\overline{AB}$ adalah yang terpendek antara semua ruas garis penghubung titik-titik itu, maka panjang ruas garis $\overline{AB}$ disebut jarak antara bangun G_1 dan G_2. Akibat dari pengertian yang demikian maka:

1. Jarak antara titik *P* dan *Q* adalah panjang ruas garis $\overline{PQ}$. (Gb. 2.2 (i))
2. Jarak antara titik *P* dan garis *g* adalah panjang ruas garis penghubung *P* dengan proyeksi *P* pada garis g. Pada Gb. 2.2 (ii), jarak antara titik *P* dan garis $g = \overline{PP_1}$.
3. Jarak antara titik *P* pada bidang *K* adalah panjang ruas garis penghubung *P* dengan proyeksi titik *P* pada bidang *K*. Pada Gb. 2.2 (iii), jarak antara titik *P* dan bidang $K = \overline{PP_1}$.
4. Jarak antara garis *g* dan bidang *K* yang sejajar adalah sama dengan jarak salah satu titik pada garis *g* terhadap bidang K. Pada Gb. 2.2 (i*V*), jarak antara *g* dan *K* dengan $g \parallel K$ adalah $\overline{PP_1}$.
5. Jarak antara bidang *K* dan L yang sejajar adalah sama dengan jarak salah satu titik pada bidang *K* terhadap bidang L, atau sebaliknya.
6. Jarak antara garis *g* dan *H* yang bersilangan adalah panjang ruas garis hubung yang letaknya tegaklurus pada *g* dan *H* (*perhatikanlah cara menggambarkannya*).$

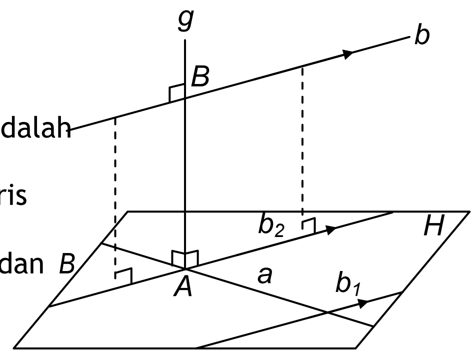


Gambar 2.2

B. CARA MELUKIS JARAK DUA GARIS *BE*RSILANGAN

Cara I (Gambar 2.3):

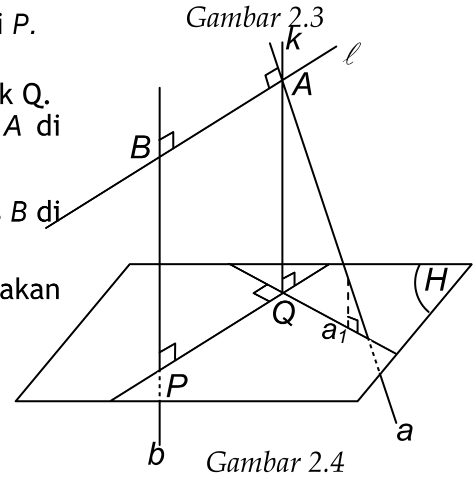
(1) Lukis garis b_1 // *B* dan memotong garis a.
(2) Lukis bidang *H* melalui *A* dan b_1.
(3) Proyeksikan garis *B* terhadap bidang *H.* Hasilnya adalah garis b_2, yang memotong garis *A* di titik A.
(4) Lukislah garis *g* yang melalui *A* ⊥ b, dan memotong garis *B* di B.
(5) *AB* = panjang $\overline{AB}$, merupakan jarak antara garis *A* dan *B* yang bersilangan.



Gambar 2.3

Cara II (Gambar 2.4):

(1) Lukislah bidang *H* ⊥ b. Bidang *H* memotong garis *B* di *P.*
(2) Proyeksikan garis *A* pada bidang *H,* hasilnya a_1.
(3) Lukislah garis melalui *P* ⊥ a_1 dan memotong a_1 di titik Q.
(4) Melalui *Q* lukis garis *k* // *B* yang memotong garis *A* di titik *A*.
(5) Melalui titik *A* lukis garis $\ell \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ dan memotong garis *B* di titik B.
(6) Panjang $\overline{AB}$ sama dengan panjang $\overline{PQ}$ dan merupakan jarak antara garis *A* dan *B* yang bersilangan.



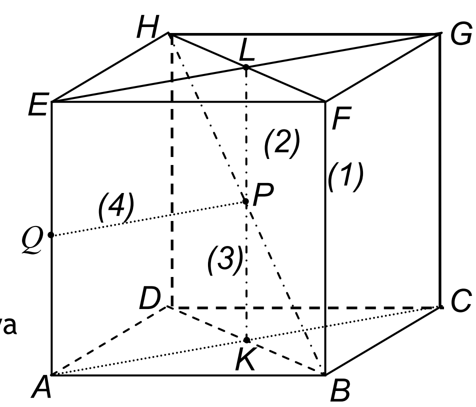
Gambar 2.4

Contoh 2.1

Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm.
Lukis dan hitunglah jarak antara $\overline{AE}$ dan $\overline{HB}$.
Jawab:

Cara I (Gambar 2.5):

(1) Akan dilukis garis sejajar $\overline{AE}$ memotong $\overline{HB}$ di *B*. Garis tersebut telah tersedia yaitu $\overleftrightarrow{BF}$.
(2) Lukis bidang melalui *HB* dan *BF*. Bidang tersebut adalah bidang *BD*HF
(3) Proyeksikan garis $\overleftrightarrow{AE}$ pada bidang *BDHF*. Hasil proyeksinya adalah garis $\overleftrightarrow{KL}$ yang memotong $\overline{HB}$ di *P.*
(4) Melalui titik *P* lukis $\overline{PQ} \perp \overline{AE}$.

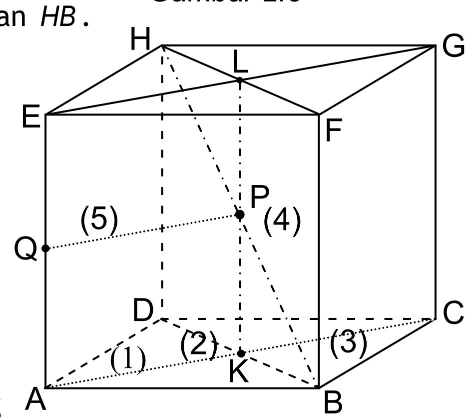


Gambar 2.5

(5) *PQ* =panjang ruas garis $\overline{PQ}$ merupakan jarak antara $\overline{AE}$ dan $\overline{HB}$.
(6) Oleh karena *PQ* = *AK* dan *AK* = $\frac{1}{2}AC$, maka $PQ = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$ cm = $3\sqrt{2}$ cm.

Cara II (Gambar 2.6)

(1) Dilukis bidang yang tegaklurus $\overline{AE}$: telah tersedia yaitu bidang *ABCD*.
(2) Proyeksikan $\overline{HB}$ pada bidang *ABCD*, yaitu $\overline{BD}$.
(3) Lukis garis melalui *A* ⊥ $\overline{BD}$, yaitu $\overline{AC}$, memotong $\overline{BD}$ di titik K.
(4) Melalui *K* dibuat garis sejajar $\overline{AE}$ yaitu $\overline{KL}$ yang memotong $\overline{HB}$ di *P.*



Gambar 2.6

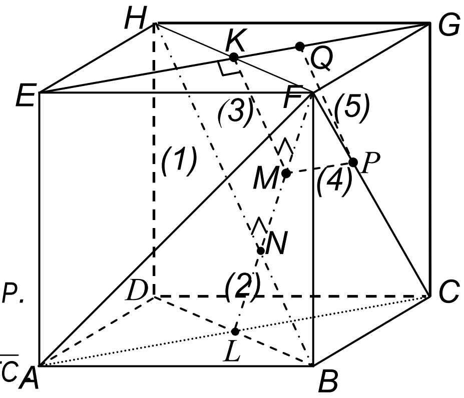
(5) Melalui *P* dibuat garis tegaklurus $\overline{AE}$ yaitu $\overline{PQ}$.
(6) *PQ* = panjang ruas garis $\overline{PQ}$, merupakan jarak antara $\overline{AE}$ dan $\overline{HB}$.
Panjangnya = AK = $\frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$ cm = $3\sqrt{2}$ cm.

Contoh

Diketahui kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm.
Lukis dan hitunglah jarak antara $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$.
Jawab: Digunakan Cara II (Gambar 2.7).

(1) Lukis bidang yang tegaklurus $\overline{EG}$, yaitu bidang *BD*HF yang memotong $\overline{EG}$ di *K*.
(2) Proyeksikan garis $\overline{FC}$ ke bidang *BD*HF, yaitu $\overline{FL}$.
(3) Melalui *K* dibuat garis tegaklurus $\overline{FL}$ dan memotong $\overline{FL}$ di titik *M*. (Dibuat $\overline{KM} \parallel \overline{HB}$, karena $\overline{HB} \perp \overline{FL}$).
(4) Melalui M dibuat garis sejajar $\overline{EG}$, memotong $\overline{FC}$ di titik *P*.
(5) Melalui *P* dibuat garis sejajar $\overline{KM}$, memotong $\overline{EG}$ di Q.
(6) Panjang ruas garis $\overline{PQ}$ merupakan jarak antara $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$

$$PQ = KM;\ KM = \tfrac{1}{2}HN = \tfrac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$



Gambar 2.7

Jadi jarak antara garis $\overline{EG}$ dan $\overline{FC}$ adalah sepanjang ruas garis $\overline{PQ}$ = $2\sqrt{3}$ cm.

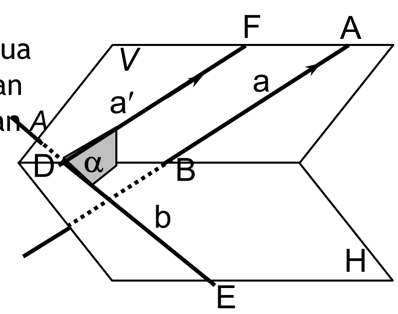
Catatan:
Jika yang ditanyakan hanya jaraknya, maka jarak tersebut sama dengan jarak antara bidang DEG dan *ACF*. Karena kedua bidang tegak lurus dan membagi tiga sama diagonal $\overline{HB}$, maka jarak kedua garis sama dengan jarak antara dua bidang sejajar tersebut = $\frac{1}{3} \times 6\sqrt{3}$ cm = $2\sqrt{3}$ cm

C. SUDUT

1. Sudut Antara Dua Garis

Sudut antara dua garis garis adalah sudut lancip atau siku-siku antara kedua garis tersebut. Dengan demikian maka sudut antara dua garis bersilangan adalah sudut lancip atau siku-siku yang terbentuk oleh kedua garis bersilangan (tidak sebidang)

Jika *A* dan *B* dua garis bersilangan, maka besar sudut antara kedua garis sama de-ngan besar sudut *antara a′* yang sebidang dengan *B* dan sejajar a, *dengan b*, atau sebaliknya: **antara b′** yang sebidang dengan *A* dan sejajar b, **dengan a.**
Jika sudutnya 90°, dikatakan *A* menyilang tegak lurus b.
Pada Gambar 2.8, *A* dan *B* bersilangan. Besar sudut antara *A* dan *B* = $\angle$EDF = α

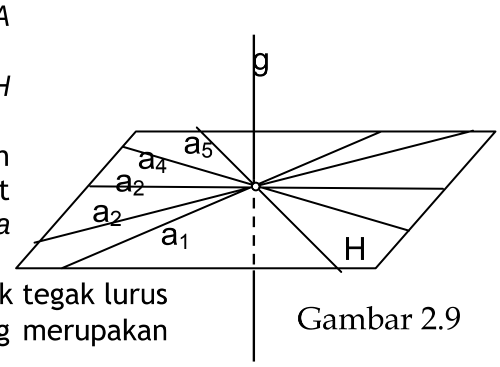


Gambar 2.8

2. Sudut Antara Garis dan Bidang

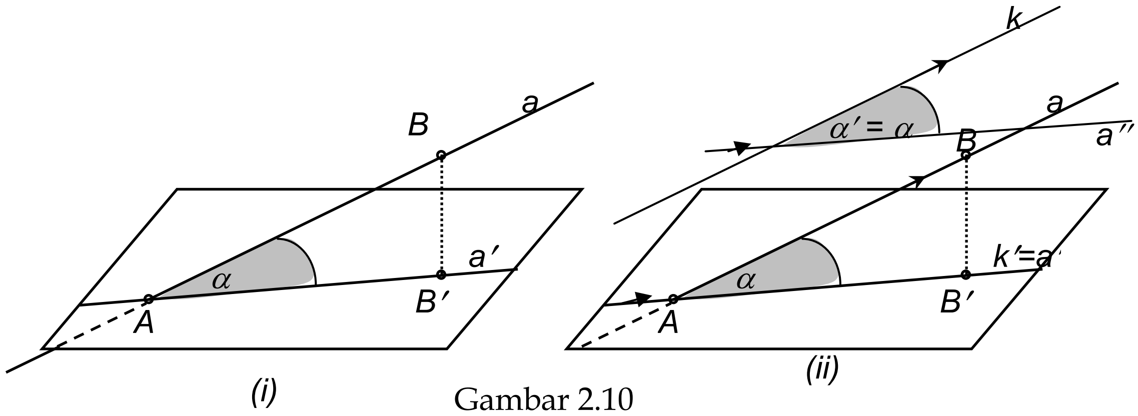
Garis *A* dikatakan tegak lurus bidang *H,* jika garis *A* tegaklurus pada semua garis pada bidang H
$g \perp a_1$, $g \perp a_2$, $g \perp a_3$, …dengan a_1, a_2, a_3, … pada bidang *H*
$\Rightarrow g \perp H$. (Gb. 2.9)

Karena dua garis berpotongan menentukan keberadaan sebuah bidang (melalui 2 garis berpotongan dapat dibuat tepat sebuah bidang), maka*: jika garis g tegak lurus pada dua buah garis pada bidang H, maka garis* $g \perp H$.



Gambar 2.9

Besar sudut antara garis *A* dan bidang *H,* dengan *A* tidak tegak lurus *H,* ditentukan oleh besar sudut antara garis *A* dan a′ yang merupakan proyeksi garis *A* pada bidang *H.*



Gambar 2.10

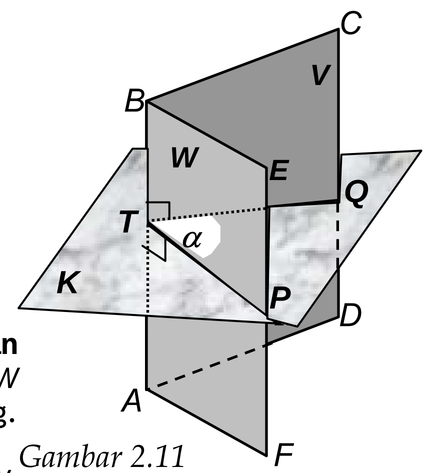
Pada Gb. 2.10 (i), *A* dan *B* pada garis a. Proyeksi *A* pada *H* adalah A′, proyeksi *B* pada *H* adalah B′, sehingga hasil proyeksi *A* pada *H* yaitu a′ adalah garis $\overleftrightarrow{AB'}$. Sudut antara *A* dan *H* = sudut antara *A* dan a′ yaitu α.

Jika pada bidang pemroyeksi dibuat garis $k \parallel a$ (Gb. 2.10 (ii)), maka $k' = a'$. Untuk menggambarkan besar sudut antara k dan a′, dalam hal ruang gambarnya tidak memungkinkan, dapat diatasi dengan menggambar garis $a'' \parallel a'$ pada bidang pe-mroyeksi sehingga besar sudut antara k dan *H* dapat diwakili oleh α', yaitu $\angle(k, a'')$.

3. Sudut Antara Dua Bidang (yang Berpotongan)

Misalkan bidang *V* dan *W* berpotongan pada garis *AB* (bidang *V* = bidang *ABCD*, bidang *W* = bidang *ABEF*). Jika sebuah bidang *K* memotong tegaklurus garis potong antara bidang *V* dan *W*, maka bidang *K* dinamakan bidang tumpuan antara bidang *V* dan *W*.

Karena bidang $K \perp V$ dan $K \perp W$, maka bidang $K \perp (V, W)$, sehingga $(V, W)) \perp (K, V)$ dan $(V, W) \perp (K, W)$. Sudut antara garis (*K*, *V*) dan (*K*, *W*) dinamakan **sudut tumpuan** antara bidang *V* dan *W*. Besar sudut antara bidang *V* dan *W* ditentukan oleh besar **sudut tumpuan** antara kedua kedua bidang. Pada Gb. 2.11, sudut yang dimaksud adalah sudut *PTQ*.



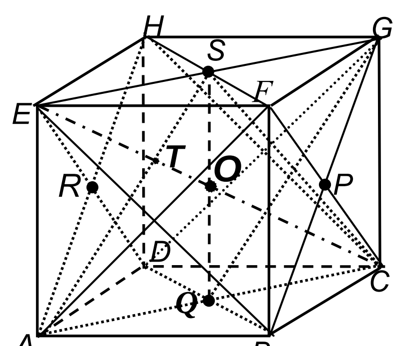
Gambar 2.11

Jadi untuk menentukan besar sudut antara dua bidang *V* dan *W* dapat dilakukan sebagai berikut:

(1) Tentukan (*V*, *W*) (dalam Gb. 2.11: $\overleftrightarrow{AB}$)
(2) Pilih sembarang titik *T* pada (*V*, *W*)
(3) Pada bidang *V* tarik garis $\overleftrightarrow{TQ} \perp (V, W)$
(4) Pada bidang *W* tarik garis $\overleftrightarrow{TP} \perp (V, W)$
maka: besar $\angle(V, W) = \angle PTQ$

Jika besar $\angle(V, W) = 90^o$, dikatakan $V \perp W$

Contoh



Gambar. 2.12

Pada kubus *ABCD.EFGH* (Gb. 2.12):

a. Sudut antara *AH* dan *BF*
= sudut antara $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{DH}$ (karena $\overleftrightarrow{DH} \parallel \overleftrightarrow{BF}$) = 45^o (karena ΔSDH siku-siku sama kaki).

b. Jika sudut antara bidang *AFH* dan *CFH* = α, berapakah cos α?
Jawab: $(AFH, CFH) = \overleftrightarrow{FH}$.

ΔAFH sama sisi dan S titik tengah $\overline{FH}$. Jadi $\overleftrightarrow{AS} \perp \overleftrightarrow{FH}$ ....(1)

ΔCFH sama sisi dan S titik tengah $\overline{FH}$. Jadi $\overleftrightarrow{CS} \perp \overleftrightarrow{FH}$ ....(2)

Jadi sudut tumpuan antara bidang *AFH* dan *CFH* = $\angle$ASF, besarnya = α.

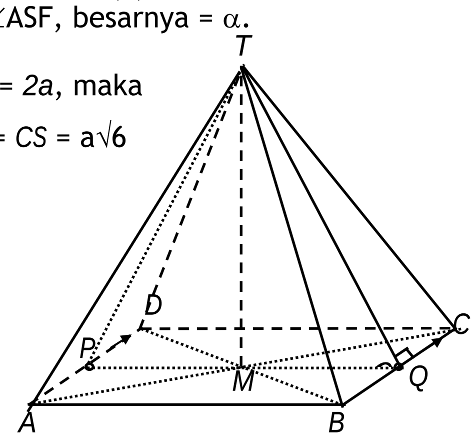
Pada ΔASF: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AS}^2 + \overline{CS}^2 - \overline{AS}^2}{2.\overline{AS}.\overline{CS}}$; misalkan *AB* = *2a*, maka

AC = 2a√2, *AS* = *CS* = a√6

$= \dfrac{6a^2 + 6a^2 - 8a^2}{2 \times a\sqrt{6} \times a\sqrt{6}}$

$= \dfrac{4a^2}{12a^2} = \frac{1}{3}$

Jadi $\cos\angle(AFH, CFH) = \frac{1}{3}$



Gambar. 2.13

1) *T.ABCD* adalah sebuah limas segi-4 beraturan (Gb. 2.13):

   AB = 6 cm, tinggi limas = 6 cm. Tentukan sin $\angle(\overleftrightarrow{TC}, ABCD)$ dan tan $\angle(TBC, ABCD)$

   Jawab:

   M = proyeksi *T* pada bidang *ABCD* dan *C* = proyeksi *T* pada bidang *ABCD*

   Jadi proyeksi $\overline{TC}$ pada bidang *ABCD* adalah $\overline{MC}$ sehingga $\angle(\overleftrightarrow{TC}, ABCD) = \angle TCM$;

   $MC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2}$ cm = 3√2 cm.

   $TC = \sqrt{\overline{TM}^2 + \overline{MC}^2} = \sqrt{6^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36+18} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ (cm)

   $\sin\angle TCM = \dfrac{\overline{TM}}{\overline{TC}} = \dfrac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

   Jadi $\sin\angle(\overleftrightarrow{TC}, ABCD) = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

   $(TBC, ABCD) = \overleftrightarrow{BC}$; *Q* pada $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{QT}$ pada bidang *TBC* tegak lurus $\overleftrightarrow{BC}$

   Q pada $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{QP}$ pada bidang *ABCD* tegak lurus $\overleftrightarrow{BC}$

   Sudut tumpuan antara bidang *TBC* dan *ABCD* adalah $\angle PTC$, tan $\angle PTC = \dfrac{TM}{MQ} = \dfrac{6}{3} = 2$

   Jadi tan $\angle(TBC, ABCD) = 2$.

Untuk no. 1-6, gunakan gambar kubus $\dfrac{EFGH}{ABCD}$ pada Gambar 12 dengan panjang rusuk 6 cm.

1. Berapakah jarak antara (1) *A* dan *C,* (2) *D* dan G?
2. Berapakah jarak (terpendek) antara E dan *C* jika ditempuh melewati bi dang sisi kubus?
3. Berapakah jarak antara (1) *B* dan $\overleftrightarrow{FC}$ (2) *D* dan $\overleftrightarrow{EG}$?
4. Berapakah jarak dan besar sudut antara (1) $\overleftrightarrow{HG}$ dan bidang *ABFE*, (2) $\overleftrightarrow{FG}$ dan *BCH*E?
5. Berapakah jarak antara bidang *ABFE* dan bidang *DCHG,* (2) bidang *AFH* dan bidang *BDG*?
6. Berapakah jarak antara (1) $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{FG}$, (2) $\overleftrightarrow{AE}$ dan $\overleftrightarrow{BD}$, dan (3) $\overleftrightarrow{GH}$ dan $\overleftrightarrow{FC}$?
7. Berapakah kosinus sudut antara:

   a. (i) $\overleftrightarrow{FC}$ dan $\overleftrightarrow{DG}$ (ii) $\overleftrightarrow{AH}$ dan $\overleftrightarrow{QG}$ (iii) $\overleftrightarrow{DH}$ dan $\overleftrightarrow{QG}$

   b. (i) $\overleftrightarrow{AH}$ dan *EFGH* (ii) $\overleftrightarrow{EG}$ dan *BDG* (iii) $\overleftrightarrow{CS}$ dan *AFH*

   c. (i) *BDG* dan *ABCD* (ii) *BEG* dan *EFGH* (iii) *AFH* dan *BDE*

8. Kubus *ABCD.EFGH* panjang rusuknya a$\sqrt{2}$ cm. Tentukanlah jarak titik *H* ke bidang DEG!

9. Dua buah garis ℓ dan m bersilangan tegak lurus. Jarak antara kedua garis itu adalah *AB* dengan *A* pada ℓ dan *B* pada m. Pada garis ℓ dan m berturut-turut terletak titik-titik *C* dan *D*, sehingga *AC* = 6 cm dan *BD* = 8 cm. Jika *AB* = 10 cm, hitunglah panjang $\overline{CD}$.

10. *D.ABC* adalah sebuah bidang empat beraturan, panjang rusuknya 6 cm.
    a. Hitung jarak antara:
       i. setiap titik sudut ke bidang sisi di hadapannya
       ii. setiap dua rusuknya yang bersilangan

    b. Hitunglah kosinus sudut antara:
       i. dua bidang sisinya
       ii sebuah rusuk dengan sisi yang ditembusnya
       iii garis tinggi dan rusuk yang dipotongnya.

11. Berapakah jarak antara (1) $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{FG}$, (2) $\overleftrightarrow{AE}$ dan $\overleftrightarrow{BD}$, dan (3) $\overleftrightarrow{GH}$ dan $\overleftrightarrow{FC}$?

12. Gambarlah kubus *ABCD.EFGH*. *K* adalah titik potong diagonal $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{BD}$. Lukislah sebuah ruas garis yang menyatakan jarak antara garis $\overleftrightarrow{BG}$ dan $\overleftrightarrow{EC}$, kemudian hitung jarak tersebut jika panjang rusuk kubus 6 cm.

13. *T.ABCD* adalah sebuah limas beraturan. *AB* = 6 cm, *TA* = 3$\sqrt{5}$ cm.

    Gambarlah sebuah ruas garis yang menyatakan jarak antara titik *B* ke bidang *TAD* dan hitunglah jarak tersebut .

14. *ABCD* adalah sebuah trapesium siku-siku di A, merupakan alas sebuah limas *T.ABCD* dengan *TA* $\perp$ *ABCD*. Panjang rusuk *AD* = 30 cm, *AB* = 20 cm, dan *BC* = 15 cm. Hitunglah: jarak antara (i) *CD* dan *TA*, (ii) *A* dan bidang *TCD*, (iii) *B* dan bidang *TCD*, dan sinus sudut antara bidang *TCD* dan *ABCD*